テーマ３　５は２の何乗か？〔$2^x=5$ となる x を求めよう〕

　この x を $x=\log_2 5$ と書き，２を底とする５の対数と呼びます．対数を考えたのはイギリス人のネイピアで，彼のおかげでは『金貸し』と『天文学者』の寿命が10年以上長くなったと言われています．

【方法１】　２と５を，２乗，３乗，… と並べて，近い数を見つける．

2	4	8	16	32	64	<u>128</u>	256	512	1024
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
5	25	<u>125</u>	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625

<u>128</u> と <u>125</u> について，およそ $2^7=5^3$ と考えるられる．
また，$2^x=5$ より，$2^{3x}=5^3$ ．
よって，$3x=7$ ，$x=\dfrac{7}{3}$　つまり，$2^{\frac{7}{3}}=5$ のように表せる．

ネイピア達はもっと計算をして，$2^{339}=5^{146}$ を見つけ，$x=\dfrac{339}{146}\ (=2.322)$ を導き出したかもしれません？（これは勝野の勝手な想像です）

【方法２】　勝野の方法（実は，$x=\dfrac{339}{146}$ はこの方法で見つけたのです．）

　ユークリッドの互除法覚えていますか？　あんな感じで電卓で互除法をします．
　勝手に“カツノの互除法”などと呼んでいます．その仕組みはあとで説明します．しっかりマスターしてください．

$\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{=}\boxed{=}$　（1.25：2より小さい値になるまで $\boxed{=}$ を押す）

$\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$　（1.024：1.25より小さい値になるまで $\boxed{=}$ を押す）

$\boxed{\div}\boxed{\div}$ 1.25 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$　（1.0097416：1.024より小）

$\boxed{\div}\boxed{\div}$ 1.024 $\boxed{=}\boxed{=}$　（1.0043369：1.0097416より小）

$\boxed{\div}\boxed{\div}$ 1.0097416 $\boxed{=}\boxed{=}$　（1.0010398：1.0097416より小）

と計算を続け，$\boxed{=}$ の個数に注目すると，

$$x=\log_2 5=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\cdots}}}}$$ と表せます．

ここで，正則連分数を表す方法を利用して， $x=\log_2 5=[\,2,\ 3,\ 9,\ 2,\ 2,\ \cdots\,]$ ．

また， $\log_2 5 \quad [\,2,3,9,2,2\,]$ とすれば，

$$\log_2 5 \quad 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{339}{146}$$ ．

この $\log_2 5 \quad \dfrac{339}{146}$ を近似分数といいます．

［練習問題］　次の対数を電卓で計算し，正則連分数で表し，近似分数を求めよう．

⑴ $\log_2 10$ （ $2^x=10$ となる x ）

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ ，

$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ ，…

$\log_2 10=[\,3,3,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\cdots\,]$ ——

⑵ $\log_3 10$ （ $3^x=10$ となる x ）

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ ，

$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ ……，…

$\log_3 10=[\,2,10,\ 2,\ 2,1,\ \cdots\,]$ ——

⑶ $\log_4 15$ （ $4^x=15$ となる x ）

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{=}$ ，

$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}$ ，…

$\log_4 15=[\,1,1,\ 20,\ 2,12\ ,\cdots\,]$ ——

[練習問題の答]　**(1)** $\log_2 10 = [\,3, 3,\ 9,\ 2,\ 2,\ \cdots\,]$　$\dfrac{485}{148}$

(2) $\log_3 10 = [\,2, 10,\ 2,\ 2, 1,\ \cdots\,]$　$\dfrac{153}{73}$

(3) $\log_4 15 = [\,1, 1,\ 20,\ 2, 12\ , \cdots\,]$　$\dfrac{1049}{537}$

“ カツノの互除法 ” を使って対数を求める…　計算は面倒ですが，面白いと思いませんか？　続いて，“ カツノの互除法 ” が何故成立つのかについての説明です．

《 $\log_2 5$ の計算の電卓図 》を式に対応させて考えます．

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ (1.25)	$5 = 2^2\ \ P$ ･･･ ①　($P = 1.25$)
$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ (1.024)	$2 = P^3\ \ Q$ ･･･ ②　($Q = 1.024$)
$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1.25}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \ldots\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ (1.0097416)	$P = Q^9\ \ R$ ･･･ ③　($R = 1.0097416$)
$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1.024}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ (1.0043369)	$Q = R^2\ \ S$ ･･･ ④　($S = 1.0043369$)
$\boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1.0097416}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ (1.0010398)	$R = S^2\ \ T$ ･･･ ⑤　($T = 1.0010398$)

ここで，⑤から①へと式の変型をします．

まず，⑤より $R = S^2\ \ T$ **を（この場合だけ）** $R = S^2$ **として考える．**

$R = S^2$ **より，** $S = R^{\frac{1}{2}}$

よって，④より $Q = R^2\ \ R^{\frac{1}{2}} = R^{\left(2+\frac{1}{2}\right)}$ **，** $R = Q^{\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ **．**

同様に，③より $P = Q^9\ \ Q^{\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = Q^{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ **，** $Q = P^{\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$ **．**

さらに，②より $2 = P^3\ \ P^{\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = P^{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$ **，** $P = 2^{\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$ **となって，**

最後に，①より $5 = 2^2\ \ 2^{\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}} = 2^{2+\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$ **．**

これで， $\log_2 5 = [\,2,\ 3,\ 9,\ 2,\ 2,\ \cdots\,]$ **の説明は完了しました．！**

大変難しい式変型でした．関数電卓で計算すると $\log_2 5 = 2.321928095$ という値が得られます．“カツノの互除法”で求めた値は $\dfrac{339}{146} = 2.3219178$ です．なかなかいい線行ってると思いませんか？

下の値も“カツノの互除法”で求めた値と比較してください．

（ $\log_2 10 = 3.321928095$ ， $\log_3 10 = 2.095903274$ ， $\log_4 15 = 1.953445298$ ）

〈電卓計算〉

(1) $\log_3 7 = [\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\cdots] = \quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad}}}} = \frac{\quad}{\quad}$

(2) $\log_5 12 = [\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\cdots] = \quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad}}}} = \frac{\quad}{\quad}$

(3) $\log_3 18 = [\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\cdots] = \quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad}}}} = \frac{\quad}{\quad}$

(4) $\log_4 33 = [\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\cdots] = \quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad + \cfrac{1}{\quad}}}} = \frac{\quad}{\quad}$

『電卓名人になろう』はこれでおしまいです．

難しい問題や変わった計算に取組みましたが，少しは面白いと思いましたか？

そして，電卓名人に少しだけでも近づいたと実感できますか？。